مبانی ترکیبیات

شروین ایران عقیده

موضوع ارائه:

مثال صفحه 39 و تبصره صفحه 40 (جمله عمومی اعداد کاتالان)

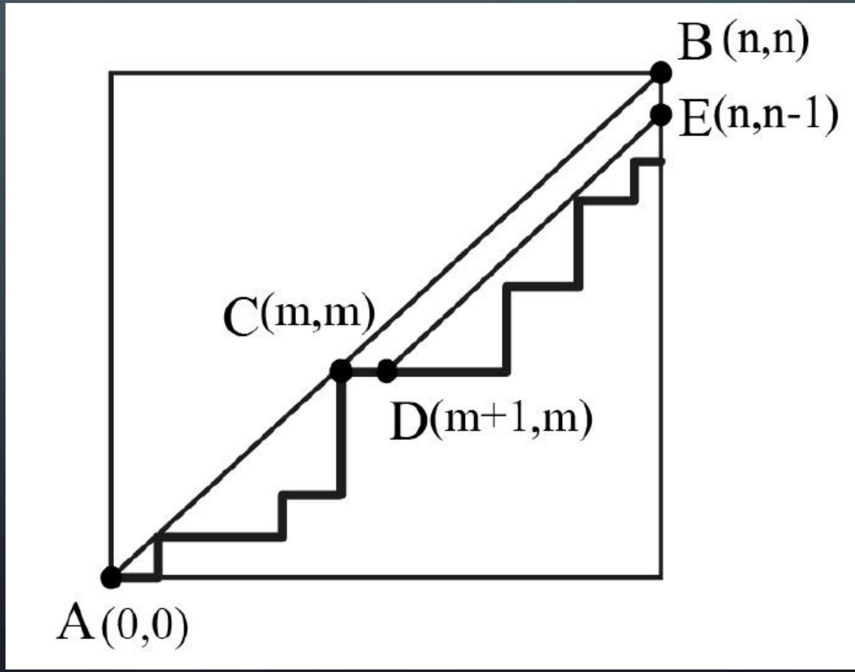
نام استاد: جناب دکتر ابوالفضل تهرانیان

مثال: فرض کنید در یک مربع $n \times n$، C_n معرف تعداد مسیرهای بالا – راست از راس پایینی سمت چپ A به سمت بالایی سمت راست B باشد به طوری که این مسیرها هرگز بالای قطر AB نروند. ثابت کنید:

$$C_n = \sum_{m=0}^{n-1} C_m . C_{n-m-1}$$

حل: این مساله را با نوشتن یک تابع بازگشتی حل می‌کنیم، فرض می‌کنیم نقطه $C_{(m,m)}$ آخرین نقطه برخورد مسیرمان با قطر AB است، در این صورت ادامه مسیر از نقطه $D_{(m+1, m)}$ تا $E_{(n, n-1)}$ است و هرگز بالای خط DE نمی‌رود چون $C_{(m,m)}$ آخرین برخورد با AB است. حال DE قطر مربعی به طول و عرض $n-(m+1) = n-m-1$ است. پس، از D تا E ، C_{n-m-1} مسیر وجود دارد و از A تا C نیز C_m مسیر موجود است، پس در این حالت بنا بر اصل ضرب $C_m . C_{n-m-1}$ مسیر وجود دارد. در حالت کلی که نقطه C می‌تواند هرجا روی AB به جز خود B باشد، m در بازه رو به رو قرار دارد: $0 \le m \le n-1$ پس کل مسیرها از A تا B بنا بر اصل جمع و با فرض $C_0 = 1$ برابر است با :

$$C_n = \sum_{m=0}^{n-1} C_m . C_{n-m-1} .$$



تبصره : با استفاده از تابع مولد و با فرض $C_0 = 1$ و n یک عدد صحیح مثبت , مقدار c_n را بدست می آید :

$$C_n = \frac{۱}{n+۱}\binom{۲n}{n}$$

حل: تابع مولد C_n را می نویسیم:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i . x^i$$

دو طرف را به توان ۲ میبریم:

$$(f(x))^2 = (\sum_{i=0}^{\infty} C_i . x^i) . (\sum_{i=0}^{\infty} C_i . x^i)$$

از $C_n = \sum_{m=0}^{n-1} C_m C_{n-m-1}$
نتیجه می شود:

$$(f(x))^2 = \sum_{i=0}^{\infty} (C_0 C_i + C_1 C_{i-1} + \cdots + C_i C_0) x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} C_{i+1} x^i$$

برای اینک توان X ، i+1 بشود ، دو طرف را در X ضرب می کنیم:

$$x(f(x))^2 = \sum_{i=0}^{\infty} C_{i+1} x^{i+1} = \sum_{i=1}^{\infty} C_i x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} C_i x^i - C_0 = f(x) - 1$$

که معادله رو به رو نتیجه می شود:

$$xf^2(x) - f(x) + 1 = 0$$

جواب های معادله به صورت: $x = \frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}$ است که با فرض $f(0) = C_0 = 1$
جواب $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ است.
با استفاده از بست دو جمله ای $(1+y)^n = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{n}{r}y^r$ که در آن : $y = -4x$
و $n=1/2$ است داریم:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2x}\{1-(1-\frac{1}{2}\cdot 4x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4^2x^2}{2!}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4^3x^3}{3!}-\cdots)\} \\
&= \frac{1}{2x}\{\frac{1}{2}\cdot 4x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4^2x^2}{2!}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4^3x^3}{3!}+\cdots\} \\
&= 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{4x}{2!}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4^2x^2}{3!}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{4^3x^3}{4!}+\cdots.
\end{aligned}$$

پس برای C_n داریم:

$$C_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n(n+1)!}4^n = \frac{2^n}{(n+1)!}\underbrace{1.3.5\ldots(2n-1)}$$

$$1.3.5\ldots(2n-1) = \frac{1.2.3.4\ldots(2n-1)(2n)}{2.4.6\ldots(2n)} = \frac{(2n)!}{2^n(1.2.3\ldots n)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

$n \geq 1$

$$C_n = \frac{2^n}{(n+1)!} \times \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{1}{(n+1)} \times \frac{(2n)!}{n!.n!}$$

$$C_n = \frac{1}{(n+1)}\binom{2n}{n}$$

پایان